コンピュータ科学II

担当：武田敦志　<takeda@cs.tohoku-gakuin.ac.jp>
http://takeda.cs.tohoku-gakuin.ac.jp/

今日の話

- コンピュータの加算回路について
  - コンピュータにおける計算の基本は加算
    - コンピュータの加算はブール代数（2進数）で行う
      - ブール代数の演算が基本となっている

今日はここを勉強します

    - 加算回路は論理
      - 論理回路：A
る回路

ブール代数(1)

- ブール代数

記号論理学・ブール代数を提唱（19世紀）

George Boole (1815-1864)

ブール代数：命題を変数で表現したもの

（例）命題 A 『テニスはスポーツである』

⇒ A = 1 （真）

命題 B 『仙台はスポーツである』

⇒ B = 0 （偽）

ブール代数の値には **0 と 1 しかない**

ブール代数 (2)

- ブール代数の演算

命題の関係を表現する

A, B が入力（条件），Z が出力（結果）

- 論理積（AND）

$$Z = A \cdot B$$

- 論理和（OR）

$$Z = A + B$$

- 否定（NOT）

$$Z = \overline{A}$$

３つの演算を組み合わせて演算式を作る

ブール代数 (3)

- ブール代数の演算
  - 論理積（AND）

命題Aと命題Bの論理積：**$A \cdot B$**

⇒ AとBの<u>両方</u>が真であれば、A・Bは真

⇒ AとBの<u>片方</u>が偽であれば、A・Bは偽

$A = 1,\ B = 1$

⇒ $A \cdot B = 1$

$A = 1,\ B = 0$

⇒ $A \cdot B = 0$

$A = 0,\ B = 1$

⇒ $A \cdot B = 0$

$A = 0,\ B = 0$

⇒ $A \cdot B = 0$

ブール代数 (4)

ブール代数の演算

- 論理和（OR）

命題Aと命題Bの論理和：**A＋B**

⇒AとBの<u>片方</u>が真であれば、A・Bは真

⇒AとBの<u>両方</u>が偽であれば、A・Bは偽

A = 1, B = 1 ⇒ A＋B = 1

A = 1, B = 0 ⇒ A＋B = 1

A = 0, B = 1 ⇒ A＋B = 1

A = 0, B = 0 ⇒ A＋B = 0

ブール代数 (5)

- ブール代数の演算
  - 否定（NOT）

命題Aの否定：$\overline{A}$

⇒ Aが真であれば、$\overline{A}$は偽

⇒ Aが偽であれば、$\overline{A}$は真

$A = 1$ ⇒ $\overline{A} = 0$

$A = 0$ ⇒ $\overline{A} = 1$

演習問題（1）

■演習問題

つぎの演算は「論理積」「論理和」「否定」のいずれか？

（A, B を入力, Z を出力とする）

① B = 0 のとき Z = 1
B = 1 のとき Z = 0

② A = 1, B = 1 のとき Z = 1
それ以外のとき Z = 0

③ A = 0, B = 0 のとき Z = 0
それ以外のとき Z = 1

複雑なブール演算 (1)

- 少し複雑なブール演算
  - ３個以上の入力

$Z = A \cdot B \cdot C$　（A = 1, B = 1, C = 1 のときだけ Z = 1）

$Z = A + B + C$　（A = 1 もしくは B = 1 もしくは C = 1 のとき Z = 1）

  - 論理積・論理和・否定の組み合わせ

計算順序は数式と同じ（否定＞論理積＞論理和の順序）

計算順序を変更する場合は括弧を使う

$Z = A \cdot B + B \cdot C$　（A = 1, B = 1 もしくは B = 1, C = 1 のとき Z = 1）

$Z = (A + B) \cdot C$　（A = 1 or B = 1 であり C = 1 のとき Z = 1 ）

複雑なブール演算 (2)

- よく使われる複雑な演算（１）
  - 論理積の否定（NAND）

    AとBの論理積の否定：$\overline{\mathbf{A \cdot B}}$

    ⇒ AとBの<u>両方</u>が 1 であれば、$\overline{A \cdot B}$は <u>**0**</u>

    ⇒ AとBの<u>片方</u>が 0 であれば、$\overline{A \cdot B}$は <u>**1**</u>

  - 論理和の否定（NOR）

    AとBの論理和の否定：$\overline{\mathbf{A + B}}$

    ⇒ AとBの<u>片方</u>が 1 であれば、$\overline{A + B}$は <u>**0**</u>

    ⇒ AとBの<u>両方</u>が 0 であれば、$\overline{A + B}$は <u>**1**</u>

複雑なブール演算 (3)

- よく使われる複雑な演算（2）
  - 排他的論理和（XOR）

    AとBの排他的論理和：$\mathbf{A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B}$

    $\Rightarrow A = 1,\ B = 1$ であれば、$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = 0$

    $\Rightarrow A = 1,\ B = 0$ であれば、$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = 1$

    $\Rightarrow A = 0,\ B = 1$ であれば、$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = 1$

    $\Rightarrow A = 0,\ B = 0$ であれば、$A \cdot \overline{B} + \overline{A} \cdot B = 0$

演習問題 (2)

- 演習問題

① $Z = A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$

$A = 1,\ B = 0,\ C = 1$ のときの Z を計算せよ

② $Z = (A + B) \cdot \overline{C}$

$A = 1,\ B = 0,\ C = 0$ のときの Z を計算せよ

真理値表 (1)

■真理値表

論理式の入力と出力の関係を表として整理する

$Z = A \cdot B$

A	B	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$Z = A + B$

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$Z = \overline{A}$

A	Z
0	1
1	0

真理値表 (2)

- 少し複雑な真理値表

$$Z = A \cdot B + B \cdot C + C \cdot A$$

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

真理値表 (3)

- 真理値表を使って論理式を確かめる

$$Z = \overline{A \cdot B}$$

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

同じ式

$$Z = \overline{A} + \overline{B}$$

A	B	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

演習問題 (3)

- 練習問題

次に示す２つの論理式が同じ式であることを
真理値表を使って確認せよ

$$Z = A \cdot (B + C)$$

$$Z = A \cdot B + A \cdot C$$

論理式の作成(1)

- 真理値表 ⇒ 論理式（1）

真理値表を読む

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

① A = 0, B = 0 のとき Z = 1

$$Z = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

② A = 1, B = 1 のとき Z = 1

$$Z = A \cdot B$$

Z = 1 となるのは、①の場合 or ②の場合

$$Z = \overline{A} \cdot \overline{B} + A \cdot B$$

論理式の作成(2)

■真理値表 ⇒ 論理式（２）

３入力の真理値表でも同じ

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$Z = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$Z = A \cdot B \cdot \overline{C}$$

$$Z = \overline{A} \cdot B \cdot \overline{C} + A \cdot B \cdot \overline{C}$$

練習問題(1)

■演習問題

次の真理値表を論理式に変換せよ

①

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

②

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1